数理解析研究所講究録
675巻 1988年 1-11

樹木上の自己共役作用素のみたす Green 関数

(数理)青本和彦 (AOMOTO, K.)

局所有限な,連結な樹木 Γ に対して $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$ を各々頂点集合,辺集合とする. $l^2(\Gamma)$ を $V(\Gamma)$ 上の複素数値関数で,絶対値2乗可積分な関数のなすヒルベルト空間とする. $l^2(\Gamma)$ 上の線型作用素 A を

(1) $$Au(\gamma) = \sum_{\langle\gamma,\gamma'\rangle} u(\gamma')\, a_{\gamma,\gamma'} + u(\gamma)\, a_{\gamma\gamma},$$

$a_{\gamma,\gamma'} = a_{\gamma',\gamma} \in \mathbb{R}$, $a_{\gamma,\gamma} \in \mathbb{R}$ によって定義する. ここで $\langle\gamma,\gamma'\rangle$ は γ' が γ に隣接している事を示すものとする. A に関して以下次の仮定を置く:

(H1) $a_{\gamma,\gamma'} \neq 0$ $\langle\gamma,\gamma'\rangle$

(H2) **A** の領域を $\mathcal{D}(A) = \{u(\gamma) \in l^2(\Gamma)\,;\ Au \in l^2(\Gamma)\}$ とおくとき, A は自己共役である: $A = A^*$

このとき A の Green 核 $(z-A)^{-1}_{\gamma,\gamma'} =$

$= G(\gamma,\gamma'|z)$ は $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ なる任意の複素数 z に対して存在し、且つ z について正則である．$G(\gamma,\gamma'|z)$ は次のスペクトル表示を持つ：

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(\gamma,\gamma'|\lambda)}{z-\lambda} = G(\gamma,\gamma'|z)$$

ここで，$d\Theta(\gamma,\gamma'|\lambda)$ はスペクトル密度を表わす．特に $\Theta(\gamma,\gamma|\lambda)$ は実軸上増加関数でしかも常数ではない．従って $G(\gamma,\gamma|z)$ は $\mathrm{Im}\, z > 0$ のときは $\mathrm{Im}\, G(\gamma,\gamma|z) < 0$ をみたす．従って $G(\gamma,\gamma|z)^{-1} = W_\gamma(z)$ は

$$(3) \qquad \mathrm{Im}\, W_\gamma(z) \cdot \mathrm{Im}\, z > 0$$

を $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ に対してみたしている．我々の主要な結果のひとつは，

［定理 1］ $\{W_\gamma(z)\}_{\gamma \in V(\Gamma)}$ は次の代数方程式の組をみたす：各 $\gamma \in V(\Gamma)$ 毎に

(4) $$z - W_\gamma(z) - a_{\gamma\gamma}$$

$$= \sum_{\langle\gamma,\gamma'\rangle} \frac{1}{2}\left(-W_\gamma + \sqrt{W_\gamma^2 + \frac{4a_{\gamma,\gamma'}^2 W_\gamma}{W_{\gamma'}}}\right).$$

且つ $W_\gamma(z)$ は $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ において正則であるが, $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ において漸近展開

(5) $$W_\gamma(z) \sim z$$

を持つ.

この定理の証明は次の２個のLemmaから直ちに得られる.

[Lemma 1] $\gamma, \gamma' \in V(\Gamma)$ を $\langle\gamma,\gamma'\rangle$ となる任意の２頂点とする. γ_0 を γ と γ' を結ぶ辺を Γ から取り除いた樹木（２個の連結成分を持つ）の同一の連結成分の任意の頂点とするとき，比

(6) $$\frac{G(\gamma_0, \gamma' | z)}{G(\gamma_0, \gamma | z)}$$

は γ_0 の取り方によらず，γ, γ' のみに依存する．

これは A の自己共役性から直ちに従う．このLemma の結果として，γ_0 が γ と同じ連結成分に属するときに，

$$(7)\qquad \frac{G(\gamma_0, \gamma' | z)}{G(\gamma_0, \gamma | z)} = \alpha\left({\gamma \atop \gamma'} \Big| z\right)$$

とおき，$\alpha\left({\gamma \atop \gamma'} \Big| z\right)$ を乗法子と呼んでおく．Lemma 1 と Green 核の定義から

[Lemma 2] $\langle \gamma, \gamma' \rangle$ に対して

$$(8)\qquad \alpha\left({\gamma \atop \gamma'}\right) = \frac{-W_\gamma + \sqrt{W_\gamma^2 + 4a_{\gamma,\gamma'}^2 \frac{W_\gamma}{W_{\gamma'}}}}{2a_{\gamma,\gamma'}}$$

が成り立つ．

(8) から，左辺従って右辺も $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ に対して正則である．実際

$$(9)\qquad \alpha\left({\gamma \atop \gamma'}\right) = \frac{G(\gamma, \gamma' | z)}{G(\gamma, \gamma | z)}$$

で，$G(\gamma, \gamma | z) \neq 0$ である．

さて (4), (5) は $W_\gamma(z)$ の Laurent 展開（漸近展開）

(10) $$\tilde{W}_\gamma(z) = z + w_\gamma^{(0)} + \frac{w_\gamma^{(1)}}{z} + \frac{w_\gamma^{(2)}}{z^2} + \cdots$$

を一意に決めるが，右辺は $z=\infty$ の近傍で収束するとは限らない．従って (10) は $\tilde{W}_\gamma(z)$ を解析関数として一意に定義するとは限らない．しかし $W_\gamma(z) = G(\gamma,\gamma|z)^{-1}$ は次の不等式をみたす：

[Lemma 3] $\langle\gamma,\gamma'\rangle$ に対して

(11) $$\mathrm{Im}\left(-W_\gamma + \sqrt{W_\gamma^2 + \frac{4a_{\gamma,\gamma'}^2 W_\gamma}{W_{\gamma'}}}\right)\cdot \mathrm{Im}\, z < 0.$$

これは，Dirichlet の公式を適用する事によって，~~や~~はり A の自己共役性から得られる．

$G(\gamma,\gamma'|z)$ は $W_\gamma(z)$，(7)，(8) によって一意に決定されるので，$G(\gamma,\gamma'|z)$ は

$W_\gamma(z)$を決めさえすればよい。これに関して次の結果が得られる。

[定理2] $\{\tilde{W}_\gamma(z)\}_{\gamma\in V(\Gamma)}$ は $W_\gamma=\tilde{W}_\gamma$ とおくとき，(4), (5), (11) をみたすものとする。このとき $\tilde{W}_\gamma(z)$ は $G(\gamma,\gamma|z)^{-1}$ に等しい。すなわち $W_\gamma(z)=G(\gamma,\gamma|z)^{-1}$ は (4), (5), (11) によって一意に決定される。

証明の方針は，Γ が有限樹木のときには $G(\gamma,\gamma|z)$ が有理的且つ $z=\infty$ において正則である事に注意し，$G(\gamma,\gamma|z)$ つまり $W_\gamma(z)$ が (4), (5) によって一意に決まる事に注意する。次に Γ に到る有限樹木の増大列 $\{\Gamma_N\}_{N\geq 1}$ を考え，その上での Green 核 $G_N(\gamma,\gamma'|z)$ を構成する。

今 $O\in V(\Gamma_N)$ を固定し，$G_N(\gamma,O)$ を考える。$dis(O,\gamma)=n$ として，O と γ を結ぶ測地線 $[O,\gamma]$ 上の点で，γ の手前の点，すなわち $dis(O,\gamma')=n-1$

となる点 γ' を $\sigma_-(\gamma)$ と書く，一方
γ と隣接し，γ の向こう側の点を
$\sigma_{+,1}(\gamma), \cdots, \sigma_{+,p}(\gamma)$ とする．すると関数
$u(\gamma)=G_N(\gamma,0)$ は $\gamma,\ \sigma_{+,j}(\gamma)\in V(\Gamma_N)$ のとき

$$(12)\quad z\,u(\gamma)=a_{\gamma,\sigma_-(\gamma)}u(\sigma_-(\gamma))+a_{\gamma,\gamma}u(\gamma)+\sum_{j=1}^{p}a_{\gamma,\sigma_{+,j}(\gamma)}u(\sigma_{+,j}(\gamma))$$

をみたす．今

$$(13)\quad \zeta_\gamma=a_{\gamma,\sigma_-(\gamma)}\frac{u(\gamma)}{u(\sigma_-(\gamma))}=a_{\gamma,\sigma_-(\gamma)}\,\alpha\binom{\sigma_-(\gamma)}{\gamma}$$

とおけば，(12) は

$$(14)\quad \zeta_\gamma=\frac{a^2_{\gamma,\sigma_-(\gamma)}}{z-a_{\gamma,\gamma}-\sum_{j=1}^{p}\zeta_{\sigma_{+,j}(\gamma)}}$$

と書ける．今 $\operatorname{Im} z>0$ と仮定すれば，

$\operatorname{Im}\zeta_{\sigma_{+,j}(\gamma)}\leqq 0$ がすべての j について成立すれ

ば，$\mathrm{Im}\,\zeta_\gamma < 0$ である．又 $\zeta_{\sigma_{+,j}(\gamma)}$

が下半面のある円の内部を動けば，

$\sum_{j=1}^{p} \zeta_{\sigma_{+,j}(\gamma)}$ も又下半面のある円の内

部を動き，從て ζ_γ も下半面のある

円の内部を動く．又

$$(15) \qquad G_N(0,0|z) = \frac{1}{z - a_{0,0} - \sum_{\langle 0,\gamma\rangle} \zeta_\gamma}$$

であるから，各 ζ_γ が下半面の円の内部

を動けば，$G(0,0|z)$ は 下半面の円の

内部を動く．

Γ_N の境界の各点 γ' において，すべて

$\zeta_{\gamma'}$ は $\mathrm{Im}\,\zeta_{\gamma'} \leqq 0$ とすれば，上記の考察

より，$\mathrm{Im}\,G_N(0,0|z) < 0$ であるが，$G_N(0,0|z)$

は下半面のある円の内部を走る事になる．

この円を Δ_N とおく．この時次が成り立つ．

[Lemma 4] $N_1 < N_2$ ならば $\Delta_{N_1} \supset \Delta_{N_2}$.

従って $\lim_{N\to\infty} \Delta_N = \Delta_\infty$ が存在し、

これは円であるか又は点である。それらは、各々極限円又は極限点と呼ばれる。

次は1次元格子に対してはよく知られた事実の樹木への拡張である。

[定理3] $\Im z > 0$ と仮定する。A が自己共役であるための必要十分条件は、Δ_∞ が極限点となる事である。

従って以下 Δ_∞ は常に極限点と仮定する。すると各 N に対して Γ_N の境界条件

$$(16) \qquad \alpha\begin{pmatrix}\sigma(\gamma)\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{G(0,\gamma|z)}{G(0,\sigma(\gamma)|z)}, \quad \gamma \in \partial\Gamma_N$$

をいかに定めようとも、Δ_N の極限である Δ_∞ は点に收縮するのだから、$N\to\infty$ にする限り、$G_N(0,0|z)$ は境界条件

の取り方によらず ただひとつの関数に収束する.

［定理2の証明］ (4), (5), (11) をみたす関数族が $W_\gamma(z) = G(\gamma,\gamma|z)^{-1}$ の他にあるものとし，それらを $\{W^*_\gamma(z)\}_{\gamma\in V(\Gamma)}$ とする.

各 Γ_N 上に制限してみれば，それらは各々

$$
(17)\quad \begin{cases} -W_{N,\gamma} + \sqrt{W_{N,\gamma}^2 + \dfrac{4a_{\gamma,\sigma(\gamma)} W_{N,\gamma}}{W_{N,\sigma(\gamma)}}} = 2\zeta_{N,\gamma} \\[2ex] -W^*_{N,\gamma} + \sqrt{(W^*_{N,\gamma})^2 + \dfrac{4a_{\gamma,\sigma(\gamma)} W^*_{N,\gamma}}{W^*_{N,\sigma(\gamma)}}} = 2\zeta^*_{N,\gamma} \end{cases}
$$

$(\gamma \in \partial\Gamma_N)$ が与えられた，(4), (5) の解に他ならない. これらは一意に与えられる. ここで $\mathrm{Im}\,\zeta_{N,\gamma} < 0$，$\mathrm{Im}\,\zeta^*_{N,\gamma} < 0$ である.

従って，対応する Green 核 $G_N(0,0|z)$, $G^*_N(0,0|z)$ は $\Delta_{\cancel{N}}$ に値をとる. $\Delta_N \longmapsto \Delta_\infty$ (= 一点)

である故

$$\lim_{N\to\infty} G_N(0,0|z) = \lim_{N\to\infty} G_N^*(0,0|z) = G(0,0|z) \tag{18}$$

でなくてはならぬ．原点で極限点であれば，他のすべての頂点でそうである事が証明されるので，

$$\lim_{N\to\infty} G_N(\gamma,\gamma|z) = \lim_{N\to\infty} G_N^*(\gamma,\gamma|z) = G(\gamma,\gamma|z) \tag{19}$$

がすべての $\gamma \in V(\Gamma)$ について言える．こうして定理2の証明が出来た．

文献

[1] K. AOMOTO, Proc. Japan Acad., Vol 64, Ser. A, No. 4, 123–125 (1988)

[2] ———, Selfadjointness and limit pointness for adjacency operators on a tree, preprint, 1988.